Problem 1

第一次更新, 加入a, L(a)=0, 对任意vi≠a有L(vi)=∞, L(a)为a到a最短路的权值

假设第k次更新, 当前的L对于要加入的u满足L(u)等于a到u最短路的权值

第k+1次更新, 加入v, 新边为<u, v>, 对任意从a到v的其他路径

设该路径最后一次加入S的顶点为x, 经过V-S的第一个顶点为y, 则

根据算法分析可得L(v)≤L(y), 令从y到v最短路径长为d(y, v), y≠v则d(y, v)>0

则有L(v)<L(y)+d(y, v), L(v)为从a到v最短路的权值, 由数学归纳法, 证毕

Problem 2

a) 11: if d(vj , vi) \* d(vi, vk) < d(vj , vk) then

b) 11: if d(vj , vi) + d(vi, vk) < ∞ and min{d(vj , vi), d(vi, vk)} < d(vj , vk) then

12: d(vj , vk) := min{d(vj , vi), d(vi, vk)}

Problem 3

不能, 如图a) 中有权值为负的回路, 则可以重复走使长度无限小, 最短路不存在

图中没有负权回路而有负权边, 也可能通过Dijkstra算法获得错误的路径

如图b) 中从a到b的最短路为a→c→b, 长度为2, Dijkstra得到a→b长度为3

b b

1 3

-5 -2

a c a c

2 4

Problem 4

a) a-b-c-d-a / a-d-c-b-a: 18 a-b-d-c-a / a-c-d-b-a: 19

a-c-b-d-a / a-d-b-c-a: 17 总权值最小的回路是a-c-b-d-a, 为17

b) 以顶点b为始点, 每次选择可选的最邻近点, 得b-a-d-c-b, 总权值为18

改进: 在已有回路中W(a, c) + W(b, d) < W(a, b) + W(c, d)

用边ac和bd替代ab和cd, b-d-a-c-b是近似最短的哈密尔顿回路

Problem 5

如图, 两个图中ab之间最短路长度都为1, bc间最短路长度都为2

ac间最短路长度都为3, 但两个图显然不同, 即根据最短路构建的图不唯一

b b

1 1

2 2

a c a c

3 4

对于权值为正的简单连通图G, 已知图上任意两点间最短路长度不能构建出G

Problem 6

a) 用已知求两点间最短通路算法分别求出vi到vk和vk到vj的最短通路长度

两个长度相加即得到从顶点vi出发到达vj且经过顶点vk的最短通路长度

b) 从原图中删除顶点vk(及以vk为顶点的所有边)

对得到的新图使用已知的求vi, vj两点间最短通路长度的算法

c) 从原图中删除顶点vj(及以vj为顶点的所有边)

对得到的新图使用已知的vi, vk两点间最短通路长度的算法

对原图使用已知的求vk, vj两点间最短通路长度的算法

两个长度相加即得到从顶点vi出发先经过vk再到达vj的最短通路长度